فصل سوم

متغیرهای تصادفی

در اغلب آزمایش‌های تصادفی، به‌جای بیان توصیفی پیشامدی حاصل، سعی می‌شود تابعی از فضای نمونه‌ای به مجموعه اعداد حقیقی تعریف و بیان آن بیان توصیفی پیشامدها به بیان عددی تعریف شوند. بنابراین می‌توان گفت:

یک متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است، بطوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد.

برای نمایش متغیر تصادفی از یکی از حروف بزرگ مانند X، Y و ... استفاده می‌شود و برای نمایش یکی از مقادیری که متغیر تصادفی بخود اختصاص می‌دهد از حروف کوچک آن یعنی x، y و ... استفاده می‌شود.

$$X : S \rightarrow R$$

مثال: سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای رو شده در سه مرتبه پرتاب در نظر بگیریم. در اینصورت فضای نمونه عبارتست از:

$$S = \{(HHH)(HHT)(HTH)(THH)(TTH)(THT)(HTT)(TTT)\}$$

مقادیر متغیر تصادفی عبارتست از: ۰، ۱، 2 و 3. X متغیری است که بطور تصادفی یکی از مقادیر ۰، ۱، 2 و 3 را بخود اختصاص می‌دهد.

متغیرهای تصادفی ۲ دسته تقسیم می‌شوند:

- متغیرهای تصادفی گسسته: متغیر تصادفی X است که روی فضای نمونه شمارش‌پذیر تعریف می‌شود.
- متغیرهای تصادفی پیوسته: " " " " " پیوسته " "

نشان دهنده اندازه داده‌ها می‌باشد.

مجموعه مقادیری که متغیر تصادفی $\overset{X}{=}$ بخود اختصاص می‌دهد و احتمال تصاویر هرکدام را در جدولی با نام تابع احتمال $f(x)$ نشان می‌دهند. در حالتی که متغیر تصادفی گسسته باشد تابع احتمال را توزیع احتمال می‌نامند.

$$P(X = x) = f(x)$$

Scanned with CamScanner

مثال: در پرتاب سه سکه با هم، در صورتی که متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد شیرها باشد، توزیع احتمال X را به دست آورید (ص ۱۲۲ کتاب)

$f(0) = P_r(X=0) = 1/8$ $\quad f(2) = P_r(X=2) = 3/8$

$f(1) = P_r(X=1) = 3/8$ $\quad f(3) = P_r(X=3) = 1/8$

x	0	1	2	3
$f(x) = P_r(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

در مثال فوق، در صورتی که متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای رو شده در سه پرتاب سکه در نظر بگیریم مطلوبیت

توزیع احتمال X: $S = \{(TTT)\ (TTH)\ (THT)\ (HTT)\ (HHT)\ (HTH)\ (THH)\ (HHH)\}$

$0-3=-3 \quad 1-2=-1 \quad 1-2=-1 \quad 1-2=-1 \quad 2-1=1 \quad 2-1=1 \quad 2-1=1 \quad 3-0=3$

$X = -3, -1, 1, 3$

x	-3	-1	+1	3
$f(x) = P_r(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

مثال فوق را با در نظر گرفتن متغیر تصادفی W به صورت (پرتاب اول شیر $W=1$ و پرتاب اول خط $W=0$) بنویسید.

W	0	1
$f(x) = P_r(X=x)$	4/8	4/8

(خطی اول) ↓ (شیری اول)

تابع $f(x)$ را یک تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته می‌گوییم در صورتی که:

1) $\forall x_i : f(x_i) \geq 0$

2) $\sum_x P(X=x_i) = \sum_i f(x_i) = 1$

مثال: در تابع زیر k را طوری بیابید که یک تابع احتمال باشد:

$P(X=x) \begin{cases} k(x+1) & x=1,2,3 \\ 0 & \text{سایر نقاط } w \end{cases}$

$\forall x=1,2,3 \quad \begin{cases} P(1) = 2/9 \\ P(2) = 3/9 \\ P(3) = 4/9 \end{cases}$ ← شرط اول و شرط دوم برقرار است ← بزرگتر مساوی صفر

$k(2) + k(3) + k(4) = 1 \Rightarrow k(2+3+4) = 1 \Rightarrow k = 1/9 \Rightarrow P_r(X=x) \begin{cases} 1/9(x+1) \\ 0 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

مطلوبست $P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

تابع توزیع تجمعی (برای متغیرهای گسسته) :

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع احتمال $f(x)$ باشد، آن گاه تابع توزیع تجمعی این متغیر را با علامت $F_X(x)$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم :

$$F_X(x) = P_r(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

مثال : متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمال $f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$ است. تابع توزیع تجمعی را برای این متغیر بیابید.

$(X = 0, 1, 2, 3)$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \rightarrow 0 \\ f(0) & 0 \leq x < 1 \rightarrow \frac{1}{8} \\ f(0)+f(1) & 1 \leq x < 2 \rightarrow \frac{4}{8} \\ f(0)+f(1)+f(2) & 2 \leq x < 3 \rightarrow \frac{7}{8} \\ f(0)+f(1)+f(2) & x \geq 3 \rightarrow 1 \end{cases}$$

خصوصیات تابع توزیع تجمعی :

1) $\forall x, \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad 0 \leq P_r(X \leq x) \leq 1$

2) $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad , \quad F_X(+\infty) = 1 \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

3) تابع $F_X(x)$ همواره غیرنزولی است. $x_i < x_j \Rightarrow P(x \leq x_j) = P(x \leq x_i) + P(x_i \leq X \leq x_j)$

$a < b \Longrightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$ $\rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$

4) $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$ یا $F_X(a^+) = F_X(a)$

تابع $F_X(x)$ از راست به نقطه a پیوسته است

تابع توزیع همواره از راست پیوسته است

Scanned with CamScanner

توجه کنید که از روی تابع توزیع تجمعی گسسته می‌توان تابع احتمال آن را توسط فرمول زیر بدست آورد:

$$f(x) = F_x(x) - \bar{F}_x(\bar{x})$$

که در آن $F_x(x)$ تابع توزیع تجمعی در نقطه x

محاسبه احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی

$F_x(x) = P(X \leq x)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(\bar{a})$

$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(\bar{b}) - F(\bar{a})$

$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(\bar{b}) - F(a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(\bar{a})$

$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(\bar{a})$

$f(a)$

مثال ۱: در مثال زیر تعریف را از احتمال را بدست آورید

y	-3	-1	1	3
$P(y=y)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & y < -3 \\ 1/8 & -3 \leq y < -1 \\ 4/8 & -1 \leq y < 1 \\ 7/8 & 1 \leq y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

الف) $P(-1 \leq y \leq 1) = F(1) - F(\bar{1}) = 7/8 - 1/8 = 6/8$

$F_Y(1) - \bar{F}_X(\bar{1}) =$

ب) $P(-3 < y \leq 2) = F(2) - F(-3) = 7/8 - 0 = 7/8$

روش دوم: در ابتدا لازم است تابع احتمال متغیر تصادفی را بدست آوریم

Scanned with CamScanner

$f(-3) = P(Y=-3) = F(-3) - F(-\bar{3}) = 1/8 - 0 = 1/8$

$f(-1) = P(Y=-1) = F(-1) - F(-\bar{1}) = 4/8 - 1/8 = 3/8$

$f(1) = P(Y=1) = F(1) - F(\bar{1}) = 7/8 - 4/8 = 3/8$

$f(3) = P(Y=3) = F(3) - F(\bar{3}) = 1 - 7/8 = 1/8$

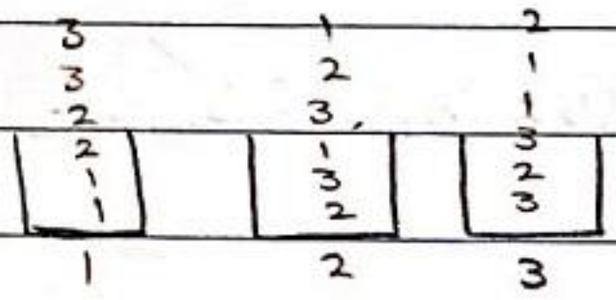
Y	-3	-1	1	3
$P(Y=y)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	1

$$\begin{cases} P(-1 \leq y \leq 1) = P(y=-1) + P(y=1) = 3/8 + 3/8 = 6/8 \\ P(-3 \leq y \leq 2) = P(y=-3) + P(y=-1) + P(y=1) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 \end{cases}$$

مثال: سه جعبه به شماره‌ی 1، 2 و 3 را در سه جعبه به شماره‌ی 1، 2 و 3 به تصادف می‌ریزیم. با تعدادی از جعبه‌ها تهی کدام جعبه بیابند. اگر متغیر تصادفی X برابر با تعداد جعبه‌ای باشد که در جعبه‌ای با شماره‌ی نظیر خودشان قرار گرفته‌اند مطلوبست:

الف) جدول توزیع احتمال X ← (تابع) تابع توزیع تجمعی X

ب) $P(0 < x \leq 3)$ ج) $P(0 < x < 2)$



$X_{(1,2,3)} = 3$ $X_{(3,2,1)} = 1$ $X_{(2,1,3)} = 1$

$X_{(1,3,2)} = 1$ $X_{(3,1,2)} = 0$ $X_{(2,3,1)} = 0$

الف) x	0	1	3
$P(X=x)$	$2/6$	$3/6$	$1/6$

ب) $F(x) = P(X \leq x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2/6 & 0 \leq x < 1 \\ 5/6 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

ج) $P(0 < x < 2) = \begin{cases} P(X=1) = 3/6 \\ F(\bar{2}) - F(0) = 5/6 - 2/6 = 3/6 \end{cases}$

د) $P(0 < x \leq 3) = \begin{cases} P(X=1) + P(X=3) = 3/6 + 1/6 = 4/6 \\ F(3) - F(0) = 1 - 2/6 = 4/6 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

متغیری تصادفی پیوسته و تابع چگالی احتمال : متغیر تصادفی پیوسته : متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد

احتمال آنکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقا یکی از مقادیر خود مانند $X=a$ را اختیار کند صفر است $\Leftarrow$ به عبارت دیگر داریم $P(X=a)=0$

در نتیجه برای متغیری تصادفی پیوسته، احتمال در یک بازه مطرح می‌شود :

$$P(a\leqslant X\leqslant b) = P(X=a)+P(X=b)+P(a<X<b)$$

$$P(a<X<b) = P(a<X<b) = P(a<X\leqslant b) = P(a\leqslant X\leqslant b)$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع $f(x)$ (تابع احتمال متغیر تصادفی X) را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌گویند.

$$P(a\leqslant X\leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx = P(a<X<b)$$

ویژگی‌های تابع چگالی احتمال $f(x)$

1) $\forall x:\ f(x)\geqslant 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

3) $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx = F_X(b)-F_X(a)$

مثال : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2 & 1<x<10 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(سه نقاط)

الف) مقدار c را تعیین کنید

ب) احتمالات زیر را محاسبه کنید :

1) $P(X>2)$

الف)
$$= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{10} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = 0 + \int_1^{10} c/x^2\,dx + 0 = 1$$

$$= -c/x\Big|_1^{10} = -c/10 + c = 1 \Rightarrow \frac{9}{10}c = 1 \Rightarrow c = 10/9$$

ب)
$$P(X>2) = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{10} \frac{10}{9x^2}\,dx = -10/9x\Big|_2^{10} = -1/9 + 5/9 = 4/9$$

CS Scanned with CamScanner

تابع توزیع تجمعی برای متغیر پیوسته $F(x) = F_X(X) = P_r(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \rightarrow$ $x \rightarrow t$

با استفاده از این تعریف می‌توان گفت: $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

مثال: در تابع چگالی احتمال زیر

$$f(x) = \begin{cases} 10/9x^2 & 1 < x < 10 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوبست: الف) تابع توزیع تجمعی X را محاسبه نمایید

ب) $P(1 \leq x \leq 5)$

الف) اگر $x < 1 \xrightarrow{\text{انتگرال}} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

اگر $1 \leq x < 10 \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{1}^{x} 10/9t^2 dt = -10/9t \Big|_1^x$

$= -10/9x + 10/9$

اگر $x \geq 10 \longrightarrow \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{10} f(t)dt + \int_{10}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{1}^{10} 10/9t^2 dt + 0 = -10/9t \Big|_1^{10}$

$= -10/90 + 10/9 = -1/9 + 10/9 = 9/9 = 1$

$$F(x) = F_x(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 10/9(1 - 1/x) & 1 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

ب) $P(1 \leq x \leq 5) = F_X(5) - F_X(1) = 10/9(1 - 1/5) - 0 = 8/9$

مثال: تابع چگالی زیر مفروض است مطلوبست:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & 0 < x < 1 \\ 2/3 & 3 < x < 4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) تابع توزیع تجمعی x

ب) $P(1 \leq x < 4) =$

$P(1/2 < x < 7/2) =$

CS Scanned with CamScanner

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x/3 & 0\le x<1 \\ 1/3 & 1\le x<3 \\ \frac{2x-5}{3} & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

$x<0 \to x<0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

$0\le x<1 \to 0\le x<1 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x} \frac{1}{3}\,dt = \frac{x}{3}$

$1\le x<3 \to F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{1}\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}t\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

$3\le x<4 \to F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{3} f(t)\,dt+\int_{3}^{x} f(t)\,dt$

$x\ge 4 = \frac{1}{3}+\int_{3}^{x}\frac{2}{3}\,dt=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\Big|_3^x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-2$

$\hookrightarrow = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{3} f(t)\,dt+\int_{3}^{4} f(t)\,dt+\int_{4}^{x} f(t)\,dt$

$=\frac{1}{3}+\int_{3}^{4}\frac{2}{3}\,dt=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\Big|_3^4=\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

$P(1\le x<4)\overset{\text{I}\ddot{\text{O}}\text{''}}{=}\int_{3}^{4} f(x)\,dx=\int_{3}^{4}\frac{2}{3}\,dx=\frac{2}{3}x\Big|_3^4=\frac{2}{3}$

$\text{I}\ddot{\text{O}}\text{''} \to F(\bar{4})-F(\bar{1})=\frac{2\times 4-5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(1/2<x<7/2)\overset{\text{I}\ddot{\text{O}}\text{''}}{=}\int_{1/2}^{1}\frac{1}{3}\,dx+\int_{3}^{7/2}\frac{2}{3}\,dx=\frac{1}{3}x\Big|_{1/2}^{1}+\frac{2}{3}x\Big|_{3}^{7/2}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{14}{6}-2\right)=\frac{2-1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\text{II}\ddot{\text{O}}\text{''} = F(\bar{7}/2)-F(\bar{1}/2)=\frac{2\times 7/2-5}{3}-\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

مثال : اگر $F(x)$ به صورت ذیل تعریف شده باشد طلوبست محاسبه

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ ax^3 & 0\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}, P(x=3)=0$$

الف) مقدار a ب) $f(x)$ ج) $P(x>1)$ د) $P(1<x<2)$

$$F'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 3ax^2 & 0\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases} = f(x)=\begin{cases} 3ax^2 & 0\le x<3 \\ 0 & \text{سایر نقاط } b \end{cases}$$

الف $\int_{0}^{3} 3ax^2\,dx=1$

$3a\int_{0}^{3} x^2\,dx=1 \Rightarrow 3a\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3=1 \Rightarrow 27a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{27}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^2/9 & 0\le x<3 \\ 0 & \text{سایر نقاط } b \end{cases}$

ج) $P(x>1)=\int_{1}^{3}\frac{x^2}{9}\,dx=\frac{x^3}{27}\Big|_1^3=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$

د) $P(1<x<2)=\int_{1}^{2}\frac{x^2}{9}\,dx=\frac{x^3}{27}\Big|_1^2=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$

Scanned with CamScanner

توزیع احتمال توام (دو متغیره):

در بخش‌های قبلی متغیرهای تصادفی مورد مطالعه کدیعدی بود و نیز در بعضی مسائل ممکن است که چند متغیر تصادفی را بعنوان مثال متغیر تصادفی X و متغیر تصادفی Y) را باهم داشته باشیم. به مثال زیر توجه کنید:

در کیسه ای 7 توپ سفید، 4 توپ سیاه وجود دارد، 3 توپ را بطور تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد توپ سفید و متغیر تصادفی Y نشان دهنده تعداد توپ سیاه باشد، در اینصورت ما فضای نمونه ای رویدادی را بطور همزمان در آزمایش دنبال می کنیم. احتمال وقوع همزمان این دو متغیر تصادفی را با علامت تابعی ذیل نشان می دهیم

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

$f(x,y)$ نشان دهنده این احتمال است که در این آزمایش، تعداد x موفقیت از متغیر تصادفی X و تعداد y موفقیت از متغیر تصادفی Y حاصل شده باشد. بعنوان مثال $f(1,2)$ نشان دهنده مقدار احتمال پیشامدی است که در آن نمونه سه تایی، 1 توپ سفید و 2 توپ سیاه باشد ←

$$f_{X,Y}(1,2) = P(X=1, Y=2)$$

قضیه: اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند احتمال وقوع هم زمان این دو متغیر تصادفی را با علامت تابعی $f_{X,Y}(x,y)$ نشان داده و آن را تابع احتمال توام X و Y می نامند.

در حالتی که X و Y هردو گسسته باشند $f_{X,Y}(x,y)$ را توزیع احتمال توام می گویند و در حالتی که X و Y هردو پیوسته باشند $f_{X,Y}(x,y)$ را تابع چگالی احتمال توام می نامند.

ویژگی های تابع توزیع احتمال توام:

1) $\forall (x,y) : F_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$

3) $P((X,Y) \in A) = \sum_A \sum f_{X,Y}(x,y)$

که برای محاسبه احتمال قرارگرفتن (X,Y) در یک ناحیه A از صفحه xy

Scanned with CamScanner

درحالتی که X و Y هردو گسسته باشند $f_{X,Y}(x,y)$ بصورت جدول تعریف می‌توان نوشت :

مثال : تابع توام ذیل را در نظر بگیرید

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1) & x=0,1,2 \\ & y=0,1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

محاسبات : الف) مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_{X,Y}(x,y)$ تابع فوق ، تابع احتمال گردد :

الف)
$$\sum_{y=0,1}\sum_{x=0,1,2} f_{X,Y}(x,y)=1 \Rightarrow \sum_{y=0,1}\sum_{x=0,1,2} k(x+y+1) = 1$$

$$k(1+2+3+2+3+4) = 1 \Rightarrow k = 1/15$$

ب) $f(2,1) = P(X=2, Y=1) \Rightarrow 1/15\,(2+1+1) = 4/15$

ج) $P(X>1, Y=0) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) \Rightarrow 1/15\,(1+0+1) + 1/15\,(2+0+1) =$
$= 2/15 + 3/15 = 5/15$

د) $P(X \le Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$
$\Rightarrow 1/15\,(0+0+1) + 1/15\,(0+1+1) + 1/15\,(1+1+1) = 1/15 + 2/15 + 3/15 = 6/15$

هـ) $P(X+Y<1) \Rightarrow P(X=0, Y=0) \Rightarrow 1/15\,(0+0+1) = 1/15$

مثال : سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم . متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای مشاهده شده در سه مرتبه پرتاب سکه و Y را تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم سکه تعریف می‌کنیم . مقادیر مختلف متغیر دوبعدی را بنویسید و تابع احتمال توام را بدست آورید :

$$S_X = \{0,1,2,3\} \qquad S_Y = \{0,1\}$$

S	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
(x,y)	(3,1)	(2,0)	(2,1)	(2,1)	(1,1)	(1,0)	(1,0)	(0,0)
$P_{X,Y}(x,y)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Y \ X	0	1	2	3
0	1/8	2/8	1/8	0
1	0	1/8	2/8	1/8

حال مجموعه $A = \{(x,y) : x \le y\}$ را محاسبه کنید

$$= P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$$
$$1/8 + 0 + 1/8 = 2/8$$

Scanned with CamScanner

مثال: از داخل جعبه ای که شامل 3 توپ آبی، 2 توپ قرمز و 4 توپ سبز است، دو توپ به تصادف و یکی یکی بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. در صورتیکه متغیر تصادفی X تعداد توپهای آبی مشاهده شده در 2 توپ انتخابی و Y تعداد توپهای قرمز مشاهده شده در 2 توپ انتخابی باشد. مطلوبست:

الف) تابع احتمال توام (X,Y) را بدست آورید ب) $P(X+Y\leq 1)$

$S_X=\{0,1,2\}$ $S_Y=\{0,1,2\}$

الف)

$f_{X,Y}(0,0)=P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=6/36$ هر 2 توپ انتخابی سبز باشد

$f_{X,Y}(0,1)=P(X=0,Y=1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}=8/36$ 1 توپ قرمز و 1 توپ سبز باشد

Y \ X	0	1	2
0	6/36	12/36	3/36
1	8/36	6/36	0
2	1/36	0	0

تابع احتمال توام X و Y را بصورت کلی نیز می توان نوشت

$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}$ $x,y=0,1,2$, $0\leq x+y\leq 2$, $=0$

ب)

$P(X+Y\leq 1)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$

$=6/36+8/36+12/36=26/36$

ویژگی های تابع احتمال توام:

1) $\forall(x,y): f_{X,Y}(x,y)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$

3) برای محاسبه احتمال قرارگرفتن X,Y در ناحیه A در صفحه xy $\rightarrow P((X,Y)\in A)=\int_A\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Scanned with CamScanner

مثال: تابع چگالی زیر مفروض است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k(x+y+1) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

الف) مقدار k چقدر است؟

ب) $P(x\le \frac{1}{2}, y\le 1)=?$

الف) $\int_0^3\int_0^1 k(x+y+1)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^3 k\left(\frac{x^2}{2}+yx+x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy=1$

$\int_0^3 k\left(\frac{1}{2}+y+1-0\right)dy=1 \Rightarrow \int_0^3 k\left(y+\frac{3}{2}\right)dy=1 \Rightarrow k\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}y\right)\Big|_{y=0}^{y=3}$ (مقدار $x=1$ قرار داده شد)

$k\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=1 \Rightarrow k\left(\frac{18}{2}\right)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{9}$

ب) $P(x\le \frac{1}{2}, y\le 1)=\int_A\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{1/2}\int_0^1 \frac{1}{9}(x+y+1)\,dx\,dy$

$\int_0^{1/2}\frac{1}{9}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^1 dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{9}\left(x+\frac{1}{2}+1\right)dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right)\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{72}$

ج) $P(x>y)=\int_C\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow \int_0^1\int_y^1 \frac{1}{9}(x+y+1)\,dx\,dy$ (C: $x>y$, $0<x<1$)

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}cx(1+2y) & 0<x<3,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف) مقدار c را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y باشد.

Scanned with CamScanner

ب) $P(1<X<2,\ 0<Y<\frac{1}{2})$ ، $P(X+2Y\geq 3)$ را حساب کنید

الف $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^3 Cx(1+2y)=1$

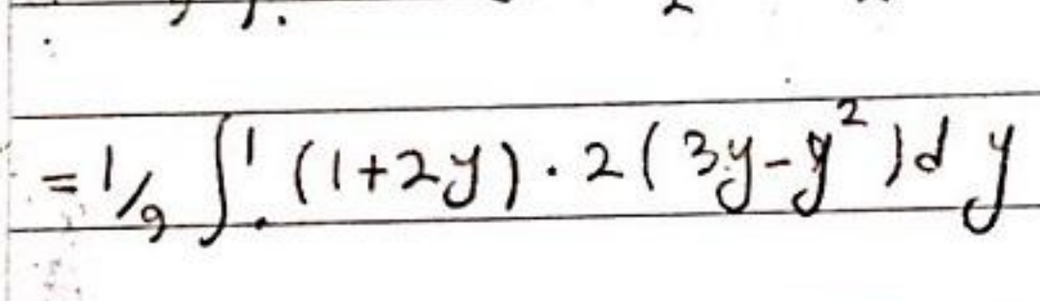
$C\int_0^1 (1+2y)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3 dy=1 \Rightarrow 1=C\int_0^1(1+2y)\left(\frac{9}{2}\right)dy \Rightarrow \frac{9C}{2}(y+y^2)\Big|_0^1=1$

$\frac{9C}{2}(1+1-0)=1 \Rightarrow 9C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{9}$

ب $P(1<x<2,\ 0<y<\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}\int_1^2 \frac{x}{9}(1+2y)\,dx\,dy=\frac{1}{9}\int_0^{1/2}(1+2y)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 dy$

$=\frac{1}{9}\int_0^{1/2}(1+2y)\left(2-\frac{1}{2}\right)dy=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\int_0^{1/2}(1+2y)\,dy=\frac{3}{18}(y+y^2)\Big|_0^{1/2}=\frac{3}{18}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{8}$

ج) برای محاسبه $P(x+2y\geq 3)$ ابتدا ناحیه $A=\{(x,y)\mid x+2y\geq 3\}$ را مشخص می‌کنیم:



$A=\{(x,y)\mid 1<x<3,\ \frac{3-x}{2}<y<1\}$

$=\{(x,y)\mid 3-2y<x<3,\ 0<y<1\}$

$P(x+2y\geq 3)=\int_0^1\int_{3-2y}^3 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dx\,dy=\frac{1}{9}\int_0^1(1+2y)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{3-2y}^3 dy=0$

$=\frac{1}{9}\int_0^1(1+2y)\left(\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{2}(3-2y)^2\right)\right)=\frac{1}{9}\int_0^1(1+2y)\left(\frac{9}{2}-\frac{9+4y^2-12y}{2}\right)dy$

$=\frac{1}{9}\int_0^1(1+2y)\cdot 2(3y-y^2)\,dy=\frac{2}{9}\int_0^1(3y-y^2+6y-2y^3)\,dy$

$=\frac{2}{9}\int_0^1(-2y^3+5y^2+3y)\,dy=\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}y^4+\frac{5}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2\right)_0^1$

$=\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2}-0\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{-3+10+9}{6}\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{16}{6}\right)=\frac{16}{27}$

Scanned with CamScanner